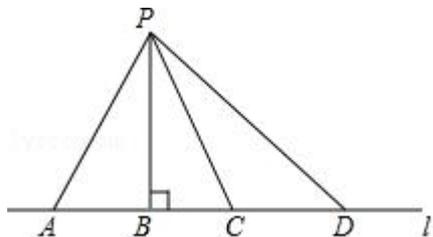


北京市中考数学试卷

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1. (3 分) 如图所示，点 P 到直线 l 的距离是 ()

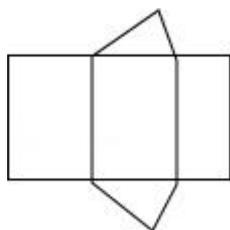


A. 线段 PA 的长度 B. 线段 PB 的长度 C. 线段 PC 的长度 D. 线段 PD 的长度

2. (3 分) 若代数式 $\frac{x}{x-4}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是 ()

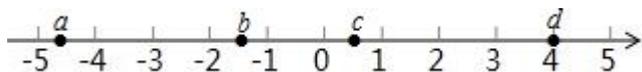
A. $x=0$ B. $x=4$ C. $x \neq 0$ D. $x \neq 4$

3. (3 分) 如图是某个几何体的展开图，该几何体是 ()



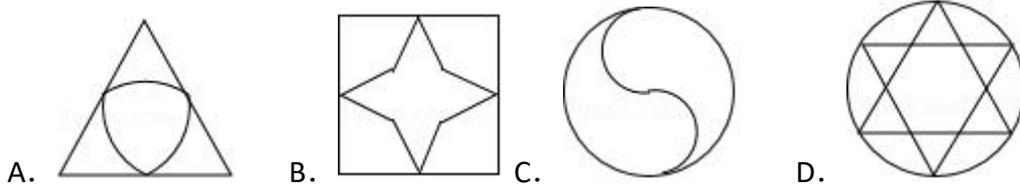
A. 三棱柱 B. 圆锥 C. 四棱柱 D. 圆柱

4. (3 分) 实数 a, b, c, d 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是 ()



A. $a > -4$ B. $bd > 0$ C. $|a| > |d|$ D. $b+c > 0$

5. (3 分) 下列图形中，是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



6. (3 分) 若正多边形的一个内角是 150° ，则该正多边形的边数是 ()

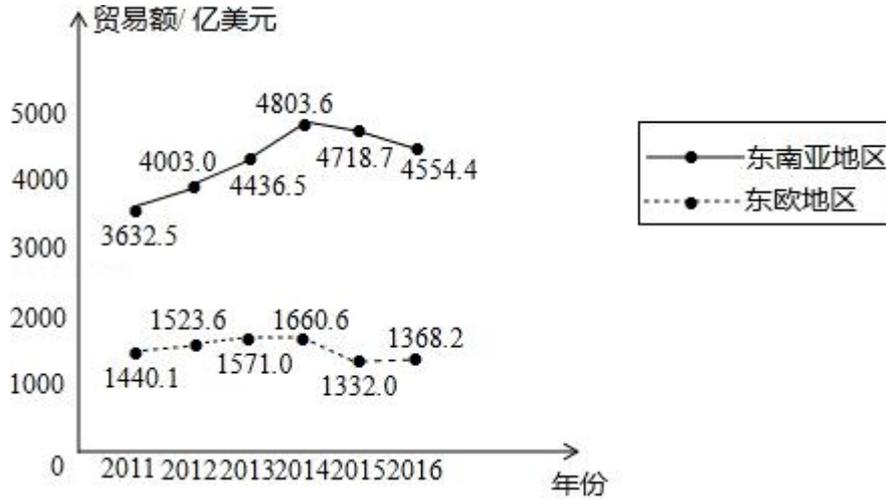
A. 6 B. 12 C. 16 D. 18

7. (3 分) 如果 $a^2+2a-1=0$ ，那么代数式 $(a - \frac{4}{a}) \cdot \frac{a^2}{a-2}$ 的值是 ()

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

8. (3分) 下面的统计图反映了我国与“一带一路”沿线部分地区的贸易情况.

2011 - 2016 年我国与东南亚地区和东欧地区的贸易额统计图



(以上数据摘自《“一带一路”贸易合作大数据报告(2017)》)

根据统计图提供的信息, 下列推理不合理的是 ()

- A. 与 2015 年相比, 2016 年我国与东欧地区的贸易额有所增长
- B. 2011 - 2016 年, 我国与东南亚地区的贸易额逐年增长
- C. 2011 - 2016 年, 我国与东南亚地区的贸易额的平均值超过 4200 亿美元
- D. 2016 年我国与东南亚地区的贸易额比我国与东欧地区的贸易额的 3 倍还多

9. (3分) 小苏和小林在如图 1 所示的跑道上进行 4×50 米折返跑. 在整个过程中, 跑步者距起跑线的距离 y (单位: m) 与跑步时间 t (单位: s) 的对应关系如图 2 所示. 下列叙述正确的是 ()

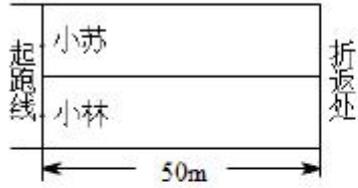


图 1

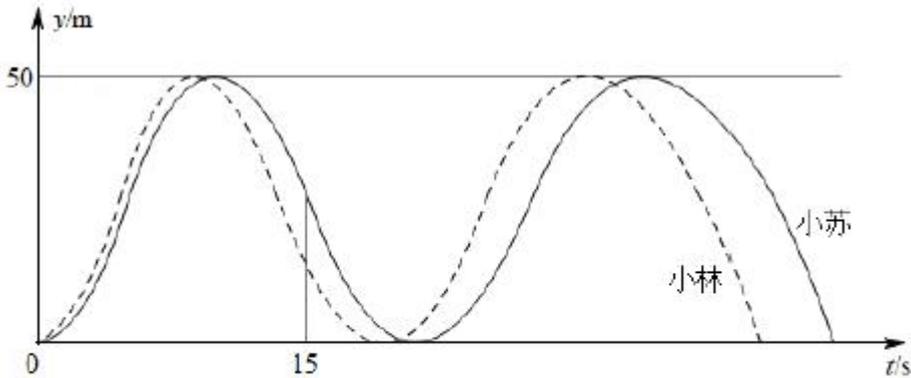
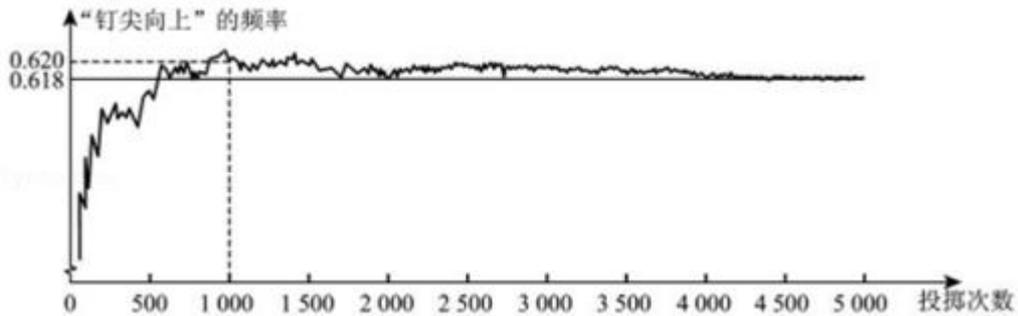


图 2

- A. 两人从起跑线同时出发，同时到达终点
- B. 小苏跑全程的平均速度大于小林跑全程的平均速度
- C. 小苏前 15s 跑过的路程大于小林前 15s 跑过的路程
- D. 小林在跑最后 100m 的过程中，与小苏相遇 2 次

10. (3 分) 如图显示了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的某次实验的结果.



下面有三个推断:

- ①当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以“钉尖向上”的概率是 0.616;
- ②随着实验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618;
- ③若再次用计算机模拟实验，则当投掷次数为 1000 时，“钉尖向上”的概率一定

是 0.620.

其中合理的是 ()

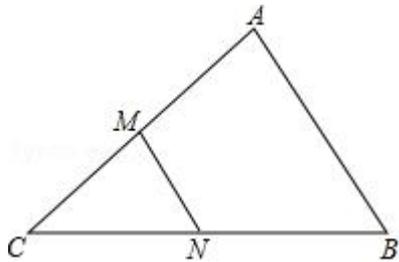
- A. ① B. ② C. ①② D. ①③

二、填空题 (本题共 18 分, 每题 3 分)

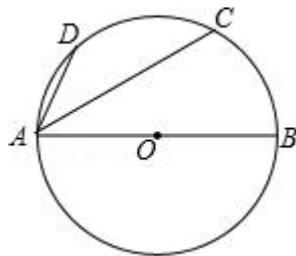
11. (3 分) 写出一个比 3 大且比 4 小的无理数: _____.

12. (3 分) 某活动小组购买了 4 个篮球和 5 个足球, 一共花费了 435 元, 其中篮球的单价比足球的单价多 3 元, 求篮球的单价和足球的单价. 设篮球的单价为 x 元, 足球的单价为 y 元, 依题意, 可列方程组为_____.

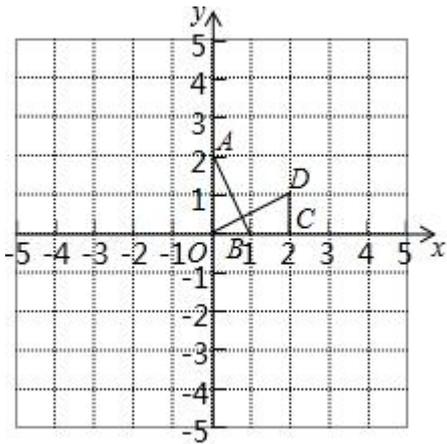
13. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, M 、 N 分别为 AC , BC 的中点. 若 $S_{\triangle CMN}=1$, 则 $S_{\text{四边形 } ABNM}$ = _____.



14. (3 分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 、 D 为 $\odot O$ 上的点, $\widehat{AD}=\widehat{CD}$. 若 $\angle CAB=40^\circ$, 则 $\angle CAD$ = _____.



15. (3 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle AOB$ 可以看作是 $\triangle OCD$ 经过若干次图形的变化 (平移、轴对称、旋转) 得到的, 写出一种由 $\triangle OCD$ 得到 $\triangle AOB$ 的过程: _____.



16. (3分) 图1是“作已知直角三角形的外接圆”的尺规作图过程

已知: $Rt\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, 求作 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆.

作法: 如图2.

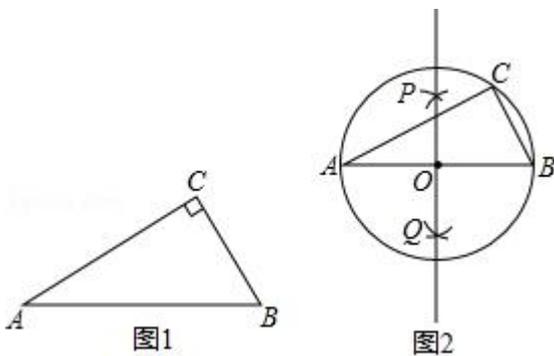
(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧, 两弧相交于 P, Q 两点;

两点;

(2) 作直线 PQ, 交 AB 于点 O;

(3) 以 O 为圆心, OA 为半径作 $\odot O$. $\odot O$ 即为所求作的圆.

请回答: 该尺规作图的依据是_____.



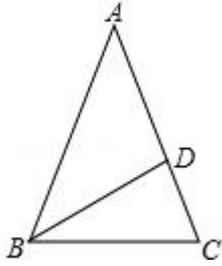
三、解答题 (本题共 72 分, 第 17 题-26 题, 每小题 5 分, 第 27 题 7 分, 第 28 题 7 分, 第 29 题 8 分) 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (5分) 计算: $4\cos 30^\circ + (1 - \sqrt{2})^0 - \sqrt{12} + |-2|$.

18. (5分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 \\ \frac{x+10}{3} > 2x \end{cases}$$
.

19. (5分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=36^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D.

求证: $AD=BC$.



20. (5分) 数学家吴文俊院士非常重视古代数学家贾宪提出的“从长方形对角线上任一点作两条分别平行于两邻边的直线，则所容两长方形面积相等（如图所示）”这一推论，他从这一推论出发，利用“出入相补”原理复原了《海岛算经》九题古证.

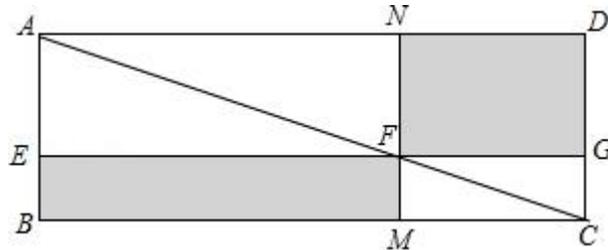
(以上材料来源于《古证复原的原理》、《吴文俊与中国数学》和《古代世界数学泰斗刘徽》)

请根据该图完成这个推论的证明过程.

证明: $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC})$, $S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\triangle ABC} - (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}})$.

易知, $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$, $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

可得 $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}$.

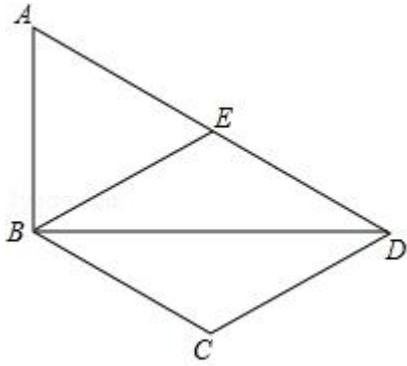


21. (5分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+3)x + 2k+2 = 0$.

- (1) 求证: 方程总有两个实数根;
- (2) 若方程有一根小于 1, 求 k 的取值范围.

22. (5分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, BD 为一条对角线, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $\angle ABD = 90^\circ$, E 为 AD 的中点, 连接 BE .

- (1) 求证: 四边形 $BCDE$ 为菱形;
- (2) 连接 AC , 若 AC 平分 $\angle BAD$, $BC = 1$, 求 AC 的长.



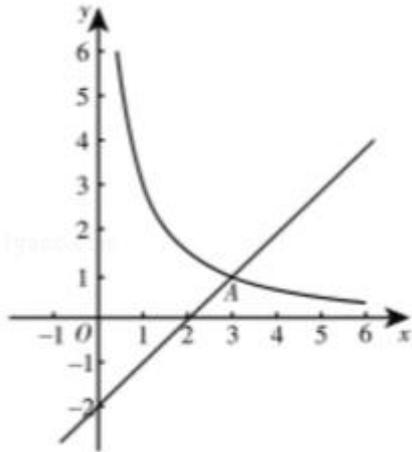
23. (5分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象与直线 $y = x - 2$ 交于点 $A(3, m)$.

(1) 求 k 、 m 的值;

(2) 已知点 $P(n, n)$ ($n > 0$), 过点 P 作平行于 x 轴的直线, 交直线 $y = x - 2$ 于点 M , 过点 P 作平行于 y 轴的直线, 交函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象于点 N .

① 当 $n=1$ 时, 判断线段 PM 与 PN 的数量关系, 并说明理由;

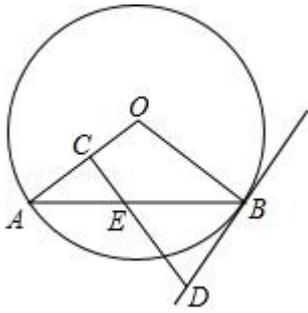
② 若 $PN \geq PM$, 结合函数的图象, 直接写出 n 的取值范围.



24. (5分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的一条弦, E 是 AB 的中点, 过点 E 作 $EC \perp OA$ 于点 C , 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 CE 的延长线于点 D .

(1) 求证: $DB = DE$;

(2) 若 $AB = 12$, $BD = 5$, 求 $\odot O$ 的半径.



25. (5分) 某工厂甲、乙两个部门各有员工 400 人，为了解这两个部门员工的生产技能情况，进行了抽样调查，过程如下，请补充完整.

收集数据

从甲、乙两个部门各随机抽取 20 名员工，进行了生产技能测试，测试成绩（百分制）如下：

甲 78 86 74 81 75 76 87 70 75 90 75 79 81 70 74 80
86 69 83 77

乙 93 73 88 81 72 81 94 83 77 83 80 81 70 81 73 78
82 80 70 40

整理、描述数据

按如下分数段整理、描述这两组样本数据：

成绩 x	$40 \leq x \leq 49$	$50 \leq x \leq 59$	$60 \leq x \leq 69$	$70 \leq x \leq 79$	$80 \leq x \leq 89$	$90 \leq x \leq 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙	—	—	—	—	—	—

（说明：成绩 80 分及以上为生产技能优秀，70 - - 79 分为生产技能良好，60 - - 69 分为生产技能合格，60 分以下为生产技能不合格）

分析数据

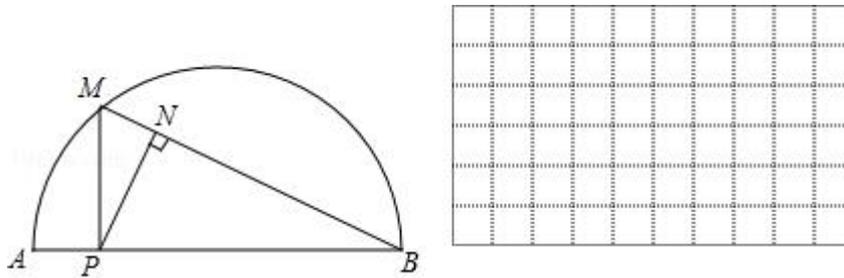
两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

部	平均	中位	众

门	数	数	数
甲	78.3	77.5	75
乙	78	80.5	81

得出结论：a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数为_____；b. 可以推断出部门员工的生产技能水平较高，理由为_____。（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

26. (5分) 如图，P是 \widehat{AB} 所对弦AB上一动点，过点P作 $PM \perp AB$ 交 \widehat{AB} 于点M，连接MB，过点P作 $PN \perp MB$ 于点N. 已知 $AB=6\text{cm}$ ，设A、P两点间的距离为 $x\text{cm}$ ，P、N两点间的距离为 $y\text{cm}$. (当点P与点A或点B重合时，y的值为0)



小东根据学习函数的经验，对函数y随自变量x的变化而变化的规律进行了探究. 下面是小东的探究过程，请补充完整：

(1) 通过取点、画图、测量，得到了x与y的几组值，如下表：

x/cm	0	1	2	3	4	5	6
y/cm	0	2.0	2.3	2.1	___	0.9	0

(说明：补全表格时相关数值保留一位小数)

(2) 建立平面直角坐标系，描出以补全后的表中各对对应值为坐标的点，画出该函数的图象.

(3) 结合画出的函数图象，解决问题：当 $\triangle PAN$ 为等腰三角形时，AP的长度约为_____cm.

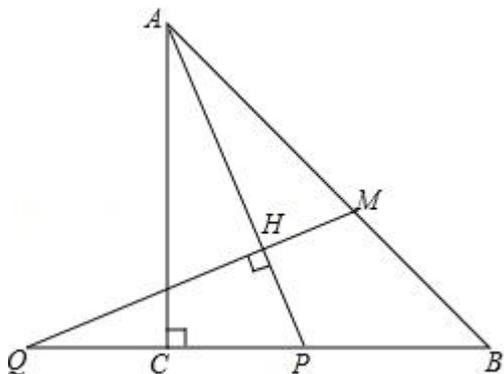
27. (7分) 在平面直角坐标系xOy中，抛物线 $y=x^2 - 4x+3$ 与x轴交于点A、B(点A在点B的左侧)，与y轴交于点C.

(1) 求直线BC的表达式；

(2) 垂直于y轴的直线l与抛物线交于点P(x_1, y_1)，Q(x_2, y_2)，与直线BC交于点N(x_3, y_3)，若 $x_1 < x_2 < x_3$ ，结合函数的图象，求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围.

28. (7分) 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, P 是线段 BC 上一动点(与点 B 、 C 不重合), 连接 AP , 延长 BC 至点 Q , 使得 $CQ=CP$, 过点 Q 作 $QH\perp AP$ 于点 H , 交 AB 于点 M .

- (1) 若 $\angle PAC=\alpha$, 求 $\angle AMQ$ 的大小(用含 α 的式子表示).
- (2) 用等式表示线段 MB 与 PQ 之间的数量关系, 并证明.



29. (8分) 在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M , 给出如下的定义: 若在图形 M 上存在一点 Q , 使得 P 、 Q 两点间的距离小于或等于 1 , 则称 P 为图形 M 的关联点.

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 2 时,

①在点 $P_1(\frac{1}{2}, 0)$, $P_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_3(\frac{5}{2}, 0)$ 中, $\odot O$ 的关联点是_____.

②点 P 在直线 $y=-x$ 上, 若 P 为 $\odot O$ 的关联点, 求点 P 的横坐标的取值范围.

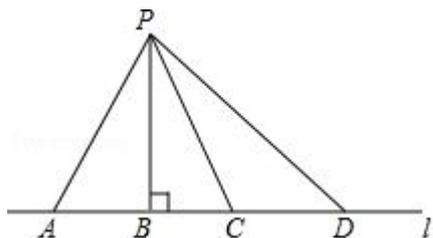
(2) $\odot C$ 的圆心在 x 轴上, 半径为 2 , 直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B . 若线段 AB 上的所有点都是 $\odot C$ 的关联点, 直接写出圆心 C 的横坐标的取值范围.

2017 年北京市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1. （3 分）（2017•北京）如图所示，点 P 到直线 l 的距离是（ ）



A. 线段 PA 的长度 B. 线段 PB 的长度 C. 线段 PC 的长度 D. 线段 PD 的长度

【分析】根据点到直线的距离是垂线段的长度，可得答案.

【解答】解：由题意，得

点 P 到直线 l 的距离是线段 PB 的长度，

故选：B.

【点评】本题考查了点到直线的距离，利用点到直线的距离是解题关键.

2. （3 分）（2017•北京）若代数式 $\frac{x}{x-4}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是（ ）

A. $x=0$ B. $x=4$ C. $x \neq 0$ D. $x \neq 4$

【分析】根据分式有意义的条件即可求出 x 的范围；

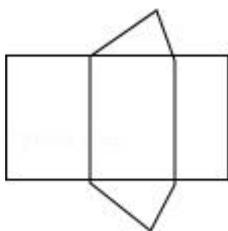
【解答】解：由代数式有意义可知： $x - 4 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 4$ ，

故选（D）

【点评】本题考查分式有意义的条件，解题的关键是正确理解分式有意义的条件，本题属于基础题型.

3. （3 分）（2017•北京）如图是某个几何体的展开图，该几何体是（ ）



A. 三棱柱 B. 圆锥 C. 四棱柱 D. 圆柱

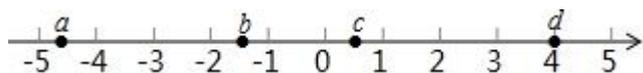
【分析】侧面为三个长方形，底边为三角形，故原几何体为三棱柱.

【解答】解：观察图形可知，这个几何体是三棱柱.

故选：A.

【点评】本题考查的是三棱柱的展开图，考法较新颖，需要对三棱柱有充分的理解.

4. (3分) (2017•北京) 实数 a , b , c , d 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是 ()



A. $a > -4$ B. $bd > 0$ C. $|a| > |d|$ D. $b+c > 0$

【分析】根据数轴上点的位置关系，可得 a , b , c , d 的大小，根据有理数的运算，绝对值的性质，可得答案.

【解答】解：由数轴上点的位置，得

$$a < -4 < b < 0 < c < 1 < d.$$

A、 $a < -4$ ，故 A 不符合题意；

B、 $bd < 0$ ，故 B 不符合题意；

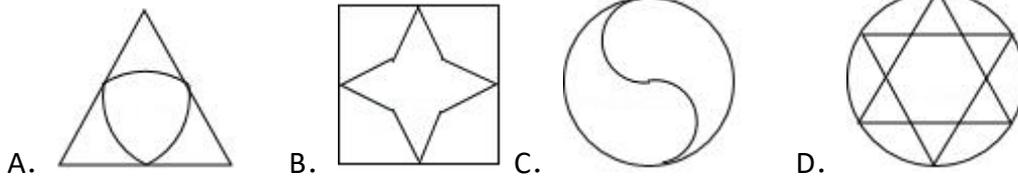
C、 $|a| > 4 = |d|$ ，故 C 符合题意；

D、 $b+c < 0$ ，故 D 不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查了实数与数轴，利用数轴上点的位置关系得出 a , b , c , d 的大小是解题关键.

5. (3分) (2017•北京) 下列图形中，是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解：A、是轴对称图形但不是中心对称图形，故本选项正确；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项错误；

C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项错误.

故选 A.

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

6. (3 分) (2017•北京) 若正多边形的一个内角是 150° ，则该正多边形的边数是 ()

- A. 6 B. 12 C. 16 D. 18

【分析】根据多边形的内角和，可得答案.

【解答】解：设多边形为 n 边形，由题意，得

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 150n,$$

解得 $n=12$,

故选：B.

【点评】本题考查了多边形的内角与外角，利用内角和公式是解题关键.

7. (3 分) (2017•北京) 如果 $a^2+2a - 1=0$ ，那么代数式 $(a - \frac{4}{a}) \cdot \frac{a^2}{a-2}$ 的值是 ()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【分析】根据分式的减法和乘法可以化简题目中的式子，然后对 $a^2+2a - 1=0$ 变形即可解答本题.

【解答】解： $(a - \frac{4}{a}) \cdot \frac{a^2}{a-2}$

$$= \frac{a^2-4}{a} \cdot \frac{a^2}{a-2}$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a} \cdot \frac{a^2}{a-2}$$

$$= a(a+2)$$

$$= a^2+2a,$$

$$\because a^2+2a - 1=0,$$

$$\therefore a^2+2a=1,$$

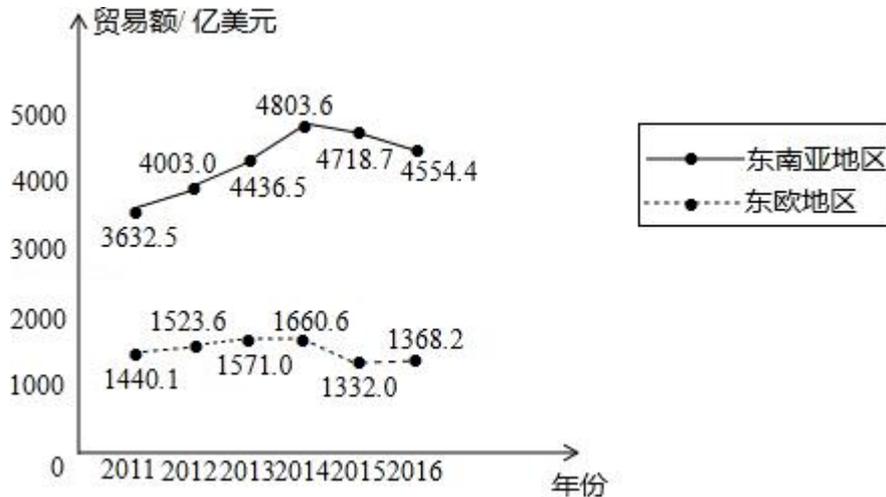
$$\therefore \text{原式}=1,$$

故选 C.

【点评】本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

8. (3分) (2017•北京) 下面的统计图反映了我国与“一带一路”沿线部分地区的贸易情况.

2011 - 2016 年我国与东南亚地区和东欧地区的贸易额统计图



(以上数据摘自《“一带一路”贸易合作大数据报告(2017)》)

根据统计图提供的信息，下列推理不合理的是 ()

- A. 与 2015 年相比，2016 年我国与东欧地区的贸易额有所增长
- B. 2011 - 2016 年，我国与东南亚地区的贸易额逐年增长
- C. 2011 - 2016 年，我国与东南亚地区的贸易额的平均值超过 4200 亿美元
- D. 2016 年我国与东南亚地区的贸易额比我国与东欧地区的贸易额的 3 倍还多

【分析】利用折线统计图结合相应数据，分别分析得出符合题意的答案.

【解答】解：A、由折线统计图可得：

与 2015 年相比，2016 年我国与东欧地区的贸易额有所增长，正确，不合题意；

B、由折线统计图可得：2011 - 2014 年，我国与东南亚地区的贸易额 2014 年后有所下降，故逐年增长错误，故此选项错误，符合题意；

C、2011 - 2016 年，我国与东南亚地区的贸易额的平均值为：

$$(3632.5+4003.0+4436.5+4803.6+4718.7+4554.4) \div 6 \approx 4358,$$

故超过 4200 亿美元，正确，不合题意，

D、 $\because 4554.4 \div 1368.2 \approx 3.33,$

\therefore 2016 年我国与东南亚地区的贸易额比我国与东欧地区的贸易额的 3 倍还多，

故选：B.

【点评】此题主要考查了折线统计图，利用折线统计图获取正确信息是解题关键.

9. (3 分)(2017•北京)小苏和小林在如图 1 所示的跑道上进行 4×50 米折返跑. 在整个过程中，跑步者距起跑线的距离 y (单位：m) 与跑步时间 t (单位：s) 的对应关系如图 2 所示. 下列叙述正确的是 ()

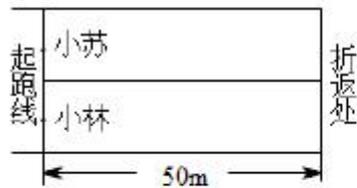


图 1

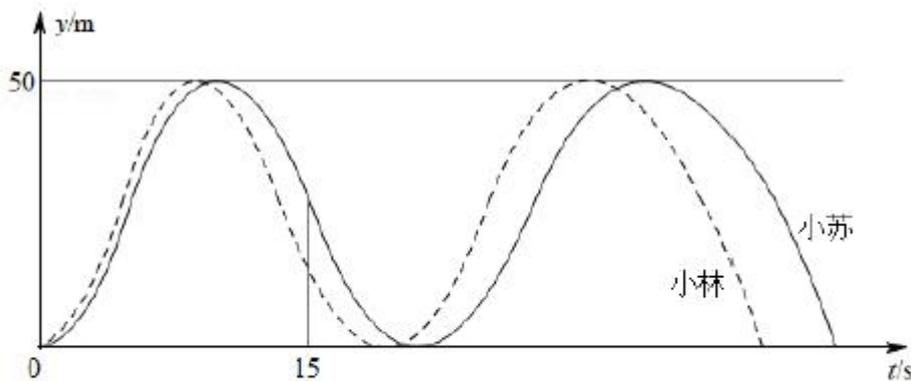


图 2

- A. 两人从起跑线同时出发，同时到达终点
- B. 小苏跑全程的平均速度大于小林跑全程的平均速度
- C. 小苏前 15s 跑过的路程大于小林前 15s 跑过的路程
- D. 小林在跑最后 100m 的过程中，与小苏相遇 2 次

【分析】通过函数图象可得，两人从起跑线同时出发，小林先到达终点，小苏后到达终点，小苏用的时间多，而路程相同，根据速度= $\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$ ，根据行程问题的数量关系可以求出甲、乙的速度，所以小苏跑全程的平均速度小于小林跑全程的平均速度，根据图象小苏前 15s 跑过的路程小于小林前 15s 跑过的路程，两人相遇时，即实线与虚线相交的地方有两次，即可解答.

【解答】解：由函数图象可知：两人从起跑线同时出发，先后到达终点，小林先到达终点，故 A 错误；

根据图象两人从起跑线同时出发，小林先到达终点，小苏后到达终点，小苏用的时间多，而路程相同，根据速度= $\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$ ，所以小苏跑全程的平均速度小于小林跑全程的平均速度，故 B 错误；

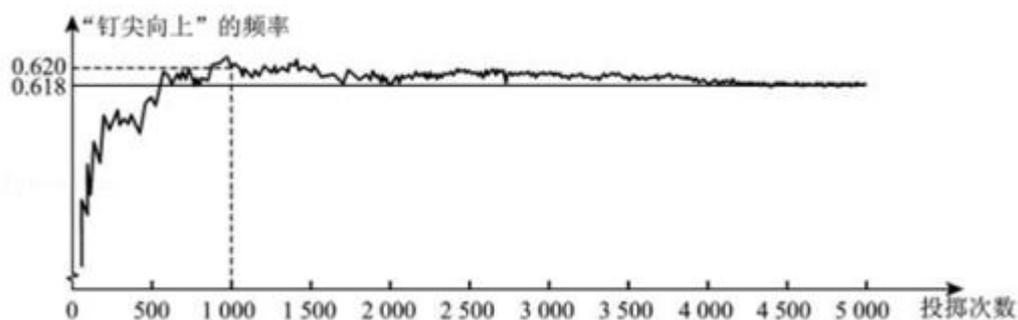
根据图象小苏前 15s 跑过的路程小于小林前 15s 跑过的路程，故 C 错误；

小林在跑最后 100m 的过程中，两人相遇时，即实线与虚线相交的地方，由图象可知 2 次，故 D 正确；

故选：D.

【点评】本题主要考查了函数图象的读图能力，要能根据函数图象的性质和图象上的数据分析得出函数的类型和所需要的条件，结合实际意义得到正确的结论.

10. (3 分) (2017•北京) 如图显示了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的某次实验的结果.



下面有三个推断：

①当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以“钉尖向上”的概率是 0.616；

②随着实验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618；

③若再次用计算机模拟实验，则当投掷次数为 1000 时，“钉尖向上”的概率一定是 0.620.

其中合理的是（ ）

A. ① B. ② C. ①② D. ①③

【分析】根据图形和各个小题的说法可以判断是否正确，从而可以解答本题.

【解答】解：当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以此时“钉尖向上”的可能性是： $308 \div 500 = 0.616$ ，但“钉尖向上”的概率不一定是 0.616，故①错误，

随着实验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618. 故②正确，

若再次用计算机模拟实验，则当投掷次数为 1000 时，“钉尖向上”的概率可能是 0.620，但不一定是 0.620，故③错误，

故选 B.

【点评】本题考查利用频率估计概率，解答本题的关键是明确概率的定义，利用数形结合的思想解答.

二、填空题（本题共 18 分，每题 3 分）

11. （3 分）（2017•北京）写出一个比 3 大且比 4 小的无理数：π.

【分析】根据无理数的定义即可.

【解答】解：写出一个比 3 大且比 4 小的无理数：π，

故答案为：π.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数. 如π， $\sqrt{6}$ ，0.8080080008...（每两个 8 之间依次多 1 个 0）等形式.

12. (3分) (2017•北京) 某活动小组购买了4个篮球和5个足球, 一共花费了435元, 其中篮球的单价比足球的单价多3元, 求篮球的单价和足球的单价. 设

篮球的单价为 x 元, 足球的单价为 y 元, 依题意, 可列方程组为 $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+5y=435 \end{cases}$.

【分析】 根据题意可得等量关系: ①4个篮球的花费+5个足球的花费=435元, ②篮球的单价-足球的单价=3元, 根据等量关系列出方程组即可.

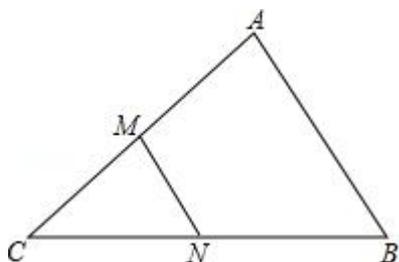
【解答】 解: 设篮球的单价为 x 元, 足球的单价为 y 元, 由题意得:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+5y=435 \end{cases}$$

故答案为: $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+5y=435 \end{cases}$.

【点评】 此题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组, 关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系.

13. (3分) (2017•北京) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, M 、 N 分别为 AC 、 BC 的中点. 若 $S_{\triangle CMN}=1$, 则 $S_{\text{四边形}ABNM}=\underline{3}$.



【分析】 证明 MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 得出 $MN \parallel AB$, 且 $MN = \frac{1}{2}AB$, 证出 $\triangle CMN \sim \triangle CAB$, 根据面积比等于相似比平方求出 $\triangle CMN$ 与 $\triangle CAB$ 的面积比, 继而可得出 $\triangle CMN$ 的面积与四边形 $ABNM$ 的面积比. 最后求出结论.

【解答】 解: $\because M, N$ 分别是边 AC, BC 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore MN \parallel AB$, 且 $MN = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

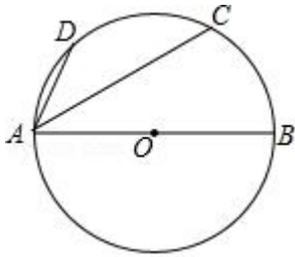
$$\therefore \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\text{四边形}ABNM}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABNM} = 3S_{\triangle CMN} = 3 \times 1 = 3.$$

故答案为：3.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、三角形中位线定理；熟练掌握三角形中位线定理，证明三角形相似是解决问题的关键.

14. (3分) (2017•北京) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C、D 为 $\odot O$ 上的点, $\widehat{AD} = \widehat{CD}$. 若 $\angle CAB = 40^\circ$, 则 $\angle CAD = \underline{25^\circ}$.



【分析】 先求出 $\angle ABC = 50^\circ$, 进而判断出 $\angle ABD = \angle CBD = 25^\circ$, 最后用同弧所对的圆周角相等即可得出结论.

【解答】 解: 如图, 连接 BC, BD,

\because AB 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAB = 40^\circ,$$

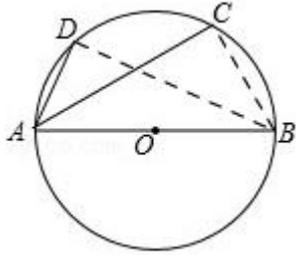
$$\therefore \angle ABC = 50^\circ,$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ,$$

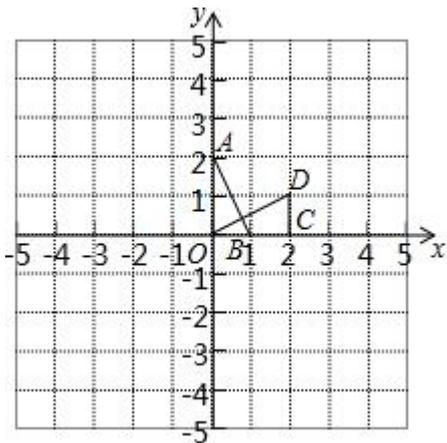
$$\therefore \angle CAD = \angle CBD = 25^\circ.$$

故答案为: 25° .



【点评】 本题考查的是圆周角定理，直径所对的圆周角是直角，直角三角形的性质，解本题的关键是作出辅助线.

15. (3分) (2017•北京) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle AOB$ 可以看作是 $\triangle OCD$ 经过若干次图形的变化（平移、轴对称、旋转）得到的，写出一种由 $\triangle OCD$ 得到 $\triangle AOB$ 的过程： $\triangle OCD$ 绕 C 点顺时针旋转 90° ，并向左平移 2 个单位得到 $\triangle AOB$.



【分析】 根据旋转的性质，平移的性质即可得到由 $\triangle OCD$ 得到 $\triangle AOB$ 的过程.

【解答】 解： $\triangle OCD$ 绕 C 点顺时针旋转 90° ，并向左平移 2 个单位得到 $\triangle AOB$ （答案不唯一）.

故答案为： $\triangle OCD$ 绕 C 点顺时针旋转 90° ，并向左平移 2 个单位得到 $\triangle AOB$.

【点评】 考查了坐标与图形变化 - 旋转，平移，对称，解题时需要注意：平移的距离等于对应点连线的长度，对称轴为对应点连线的垂直平分线，旋转角为对应点与旋转中心连线的夹角的大小.

16. (3分) (2017•北京) 图 1 是“作已知直角三角形的外接圆”的尺规作图过程
已知： $Rt\triangle ABC$ ， $\angle C=90^\circ$ ，求作 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆.

作法：如图 2.

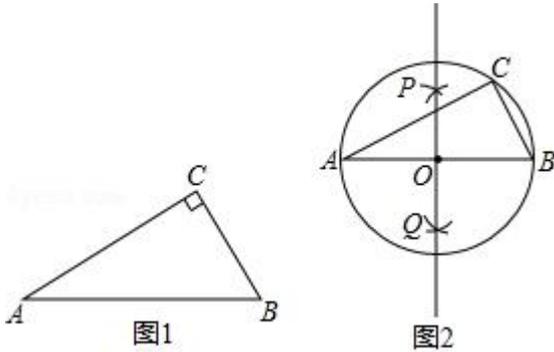
(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 P, Q

两点；

(2) 作直线 PQ，交 AB 于点 O；

(3) 以 O 为圆心，OA 为半径作 $\odot O$. $\odot O$ 即为所求作的圆.

请回答：该尺规作图的依据是 到线段两端点的距离相等的点在这条线段的垂直平分线上；两点确定一条直线； 90° 的圆周角所对的弦是直径；圆的定义.



【分析】 由于 90° 的圆周角所对的弦是直径，所以 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 AB 的中点，然后作 AB 的中垂线得到圆心后即可得到 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆.

【解答】 解：该尺规作图的依据是到线段两端点的距离相等的点在这条线段的垂直平分线上； 90° 的圆周角所对的弦是直径.

故答案为到线段两端点的距离相等的点在这条线段的垂直平分线上；两点确定一直线； 90° 的圆周角所对的弦是直径；圆的定义.

【点评】 本题考查了作图 - 复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法. 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作.

三、解答题（本题共 72 分，第 17 题-26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (5 分) (2017•北京) 计算： $4\cos 30^\circ + (1 - \sqrt{2})^0 - \sqrt{12} + |-2|$.

【分析】 首先利用二次根式的性质以及特殊角的三角函数值、绝对值的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式 $=4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 2\sqrt{3} + 2$
 $=2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$
 $=3.$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18. (5分) (2017•北京) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 \\ \frac{x+10}{3} > 2x \end{cases} .$$

【分析】利用不等式的性质，先求出两个不等式的解集，再求其公共解.

【解答】解:
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 \text{ ①} \\ \frac{x+10}{3} > 2x \text{ ②} \end{cases} ,$$

由①式得 $x < 3$;

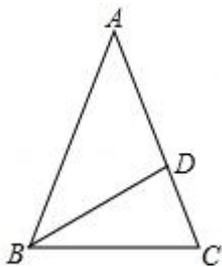
由②式得 $x < 2$,

所以不等式组的解为 $x < 2$.

【点评】此题考查解不等式组；求不等式组的解集，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

19. (5分) (2017•北京) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D .

求证: $AD=BC$.



【分析】根据等腰三角形的性质得到 $\angle ABC=\angle C=72^\circ$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle ABD=\angle DBC=36^\circ$ ， $\angle BDC=72^\circ$ ，根据等腰三角形的判定即可得到结论.

【解答】证明: $\because AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC=\angle C=72^\circ$ ，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ，

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = 36^\circ, \quad \angle BDC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD, \quad \angle BDC = \angle C,$$

$$\therefore AD = BD = BC.$$

【点评】本题主要考查等腰三角形的性质和判定，掌握等边对等角是解题的关键，注意三角形内角和定理的应用。

20. (5分) (2017•北京) 数学家吴文俊院士非常重视古代数学家贾宪提出的“从长方形对角线上任一点作两条分别平行于两邻边的直线，则所容两长方形面积相等(如图所示)”这一推论，他从这一推论出发，利用“出入相补”原理复原了《海岛算经》九题古证。

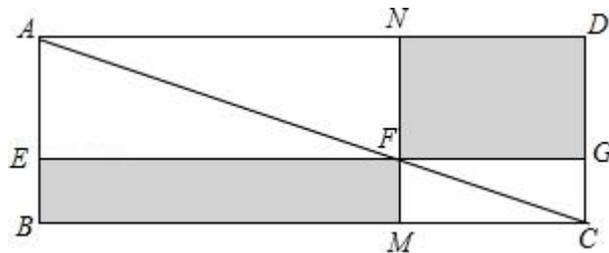
(以上材料来源于《古证复原的原理》、《吴文俊与中国数学》和《古代世界数学泰斗刘徽》)

请根据该图完成这个推论的证明过程。

证明： $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC})$ ， $S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\triangle ABC} - (\underline{S_{\triangle AEF}} + \underline{S_{\triangle FCM}})$ 。

易知， $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$ ， $\underline{S_{\triangle ANF}} = \underline{S_{\triangle AEF}}$ ， $\underline{S_{\triangle FGC}} = \underline{S_{\triangle FCM}}$ 。

可得 $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}$ 。



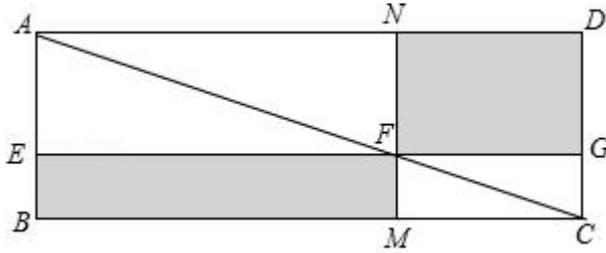
【分析】根据矩形的性质：矩形的对角线把矩形分成面积相等的两部分，由此即可证明结论。

【解答】证明： $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC})$ ， $S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FCM})$ 。

易知， $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$ ， $S_{\triangle ANF} = S_{\triangle AEF}$ ， $S_{\triangle FGC} = S_{\triangle FCM}$ ，

可得 $S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}$ 。

故答案分别为 $S_{\triangle AEF}$ ， $S_{\triangle FCM}$ ， $S_{\triangle ANF}$ ， $S_{\triangle AEF}$ ， $S_{\triangle FGC}$ ， $S_{\triangle FCM}$ 。



【点评】 本题考查矩形的性质，解题的关键是灵活运用矩形的对角线把矩形分成面积相等的两部分这个性质，属于中考常考题型.

21. (5分) (2017•北京) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+3)x + 2k+2 = 0$.

- (1) 求证：方程总有两个实数根；
- (2) 若方程有一根小于 1，求 k 的取值范围.

【分析】 (1) 根据方程的系数结合根的判别式，可得 $\Delta = (k-1)^2 \geq 0$ ，由此可证出方程总有两个实数根；

(2) 利用分解因式法解一元二次方程，可得出 $x_1=2$ 、 $x_2=k+1$ ，根据方程有一根小于 1，即可得出关于 k 的一元一次不等式，解之即可得出 k 的取值范围.

【解答】 (1) 证明： \because 在方程 $x^2 - (k+3)x + 2k+2 = 0$ 中， $\Delta = [-(k+3)]^2 - 4 \times 1 \times (2k+2) = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$,

\therefore 方程总有两个实数根.

(2) 解： $\because x^2 - (k+3)x + 2k+2 = (x-2)(x-k-1) = 0$,

$\therefore x_1=2$, $x_2=k+1$.

\because 方程有一根小于 1，

$\therefore k+1 < 1$ ，解得： $k < 0$ ，

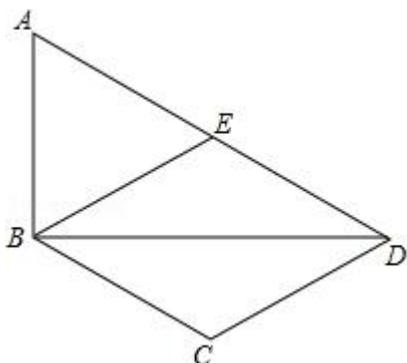
$\therefore k$ 的取值范围为 $k < 0$.

【点评】 本题考查了根的判别式、因式分解法解一元二次方程以及解一元一次不等式，解题的关键是：(1) 牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时，方程有两个实数根”；(2) 利用因式分解法解一元二次方程结合方程一根小于 1，找出关于 k 的一元一次不等式.

22. (5分) (2017•北京) 如图，在四边形 ABCD 中，BD 为一条对角线， $AD \parallel BC$ ， $AD=2BC$ ， $\angle ABD=90^\circ$ ，E 为 AD 的中点，连接 BE.

- (1) 求证：四边形 BCDE 为菱形；

(2) 连接 AC, 若 AC 平分 $\angle BAD$, $BC=1$, 求 AC 的长.



【分析】(1) 由 $DE=BC$, $DE \parallel BC$, 推出四边形 BCDE 是平行四边形, 再证明 $BE=DE$ 即可解决问题;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中只要证明 $\angle ADC=60^\circ$, $AD=2$ 即可解决问题;

【解答】(1) 证明: $\because AD=2BC$, E 为 AD 的中点,

$$\therefore DE=BC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

\therefore 四边形 BCDE 是平行四边形,

$$\because \angle ABD=90^\circ, AE=DE,$$

$$\therefore BE=DE,$$

\therefore 四边形 BCDE 是菱形.

(2) 解: 连接 AC.

$$\because AD \parallel BC, AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA,$$

$$\therefore AB=BC=1,$$

$$\because AD=2BC=2,$$

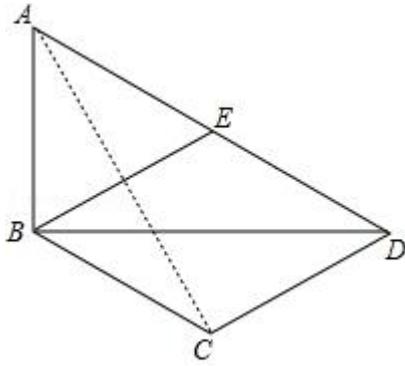
$$\therefore \sin \angle ADB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ADB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC=30^\circ, \angle ADC=60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\because AD=2$,

$$\therefore CD=1, AC=\sqrt{3}.$$



【点评】 本题考查菱形的判定和性质、直角三角形斜边中线的性质、锐角三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的判定方法，属于中考常考题型.

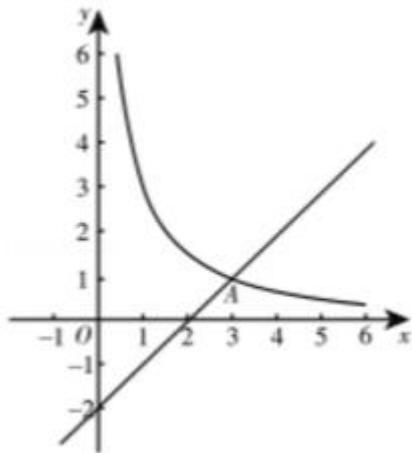
23. (5分) (2017•北京) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象与直线 $y = x - 2$ 交于点 $A(3, m)$.

(1) 求 k 、 m 的值；

(2) 已知点 $P(n, n)$ ($n > 0$)，过点 P 作平行于 x 轴的直线，交直线 $y = x - 2$ 于点 M ，过点 P 作平行于 y 轴的直线，交函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象于点 N .

①当 $n=1$ 时，判断线段 PM 与 PN 的数量关系，并说明理由；

②若 $PN \geq PM$ ，结合函数的图象，直接写出 n 的取值范围.



【分析】 (1) 将 A 点代入 $y = x - 2$ 中即可求出 m 的值，然后将 A 的坐标代入反比例函数中即可求出 k 的值.

(2) ①当 $n=1$ 时，分别求出 M 、 N 两点的坐标即可求出 PM 与 PN 的关系；

②由题意可知： P 的坐标为 (n, n) ，由于 $PN \geq PM$ ，从而可知 $PN \geq 2$ ，根据图象可求出 n 的范围.

【解答】解：（1）将 A（3， m）代入 $y=x-2$ ，

$$\therefore m=3-2=1,$$

$$\therefore A(3, 1),$$

将 A（3， 1）代入 $y=\frac{k}{x}$ ，

$$\therefore k=3 \times 1=3,$$

（2）①当 $n=1$ 时， P（1， 1），

令 $y=1$ ， 代入 $y=x-2$ ，

$$x-2=1,$$

$$\therefore x=3,$$

$$\therefore M(3, 1),$$

$$\therefore PM=2,$$

令 $x=1$ 代入 $y=\frac{3}{x}$ ，

$$\therefore y=3,$$

$$\therefore N(1, 3),$$

$$\therefore PN=2$$

$$\therefore PM=PN,$$

②P（n， n），

点 P 在直线 $y=x$ 上，

过点 P 作平行于 x 轴的直线， 交直线 $y=x-2$ 于点 M，

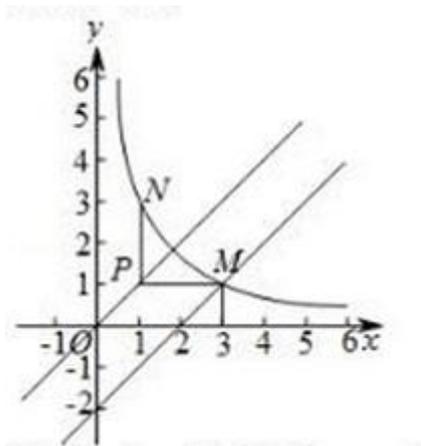
$$M(n+2, n),$$

$$\therefore PM=2,$$

$$\therefore PN \geq PM,$$

即 $PN \geq 2$ ，

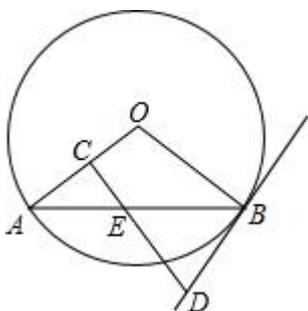
$$\therefore 0 < n \leq 1 \text{ 或 } n \geq 3$$



【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的综合问题，解题的关键是求出反比例函数与一次函数的解析式，本题属于基础题型。

24. (5分) (2017•北京) 如图，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，E 是 AB 的中点，过点 E 作 $EC \perp OA$ 于点 C，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 CE 的延长线于点 D。

- (1) 求证：DB=DE；
- (2) 若 AB=12，BD=5，求 $\odot O$ 的半径。



【分析】 (1) 欲证明 DB=DE，只要证明 $\angle DEB = \angle DBE$ ；
 (2) 作 $DF \perp AB$ 于 F，连接 OE。只要证明 $\angle AOE = \angle DEF$ ，可得 $\sin \angle DEF = \sin \angle AOE = \frac{AE}{AO} = \frac{4}{5}$ ，由此求出 AE 即可解决问题。

【解答】 (1) 证明： $\because AO = OB$ ，
 $\therefore \angle OAB = \angle OBA$ ，
 $\because BD$ 是切线，
 $\therefore OB \perp BD$ ，
 $\therefore \angle OBD = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle OBE + \angle EBD = 90^\circ$ ，

$\because EC \perp OA$,
 $\therefore \angle CAE + \angle CEA = 90^\circ$,
 $\because \angle CEA = \angle DEB$,
 $\therefore \angle EBD = \angle BED$,
 $\therefore DB = DE$.

(2) 作 $DF \perp AB$ 于 F , 连接 OE .

$\because DB = DE$, $AE = EB = 6$,
 $\therefore EF = \frac{1}{2}BE = 3$, $OE \perp AB$,

在 $Rt\triangle EDF$ 中, $DE = BD = 5$, $EF = 3$,

$\therefore DF = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\because \angle AOE + \angle A = 90^\circ$, $\angle DEF + \angle A = 90^\circ$,

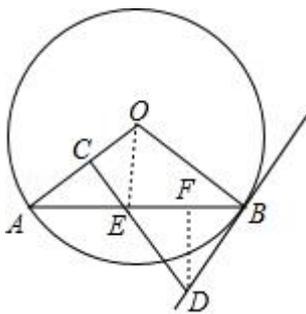
$\therefore \angle AOE = \angle DEF$,

$\therefore \sin \angle DEF = \sin \angle AOE = \frac{AE}{AO} = \frac{4}{5}$,

$\because AE = 6$,

$\therefore AO = \frac{15}{2}$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{15}{2}$.



【点评】 本题考查切线的性质、勾股定理、垂径定理、锐角三角函数、等腰三角形的性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

25. (5分) (2017•北京) 某工厂甲、乙两个部门各有员工 400 人, 为了解这两

个部门员工的生产技能情况，进行了抽样调查，过程如下，请补充完整。

收集数据

从甲、乙两个部门各随机抽取 20 名员工，进行了生产技能测试，测试成绩（百分制）如下：

甲 78 86 74 81 75 76 87 70 75 90 75 79 81 70 74 80
86 69 83 77

乙 93 73 88 81 72 81 94 83 77 83 80 81 70 81 73 78
82 80 70 40

整理、描述数据

按如下分数段整理、描述这两组样本数据：

成绩 x	$40 \leq x \leq 49$	$50 \leq x \leq 59$	$60 \leq x \leq 69$	$70 \leq x \leq 79$	$80 \leq x \leq 89$	$90 \leq x \leq 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>7</u>	<u>10</u>	<u>2</u>

（说明：成绩 80 分及以上为生产技能优秀，70 - - 79 分为生产技能良好，60 - - 69 分为生产技能合格，60 分以下为生产技能不合格）

分析数据

两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

部门	平均数	中位数	众数
甲	78.3	77.5	75
乙	78	80.5	81

得出结论：a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数为 240；b. 可以推断出甲或乙 乙 部门员工的生产技能水平较高，理由为 ①甲部门生产技能测试中，平均分较高，表示甲部门员工的生产技能水平较高；

②甲部门生产技能测试中，没有技能不合格的员工，表示甲部门员工的生产技能水平较高。

或①乙部门生产技能测试中，中位数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高；

②乙部门生产技能测试中，众数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高。____。（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

【分析】根据收集数据填写表格即可求解；

用乙部门优秀员工人数除以 20 乘以 400 即可得出答案，根据情况进行讨论分析，理由合理即可。

【解答】解：填表如下：

成绩 x	$40 \leq x \leq 49$	$50 \leq x \leq 59$	$60 \leq x \leq 69$	$70 \leq x \leq 79$	$80 \leq x \leq 89$	$90 \leq x \leq 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙	1	0	0	7	10	2

a. $\frac{12}{20} \times 400 = 240$ （人）。

故估计乙部门生产技能优秀的员工人数为 240；

b. 答案不唯一，理由合理即可。

可以推断出甲部门员工的生产技能水平较高，理由为：

①甲部门生产技能测试中，平均分较高，表示甲部门员工的生产技能水平较高；

②甲部门生产技能测试中，没有技能不合格的员工，表示甲部门员工的生产技能水平较高。

或可以推断出乙部门员工的生产技能水平较高，理由为：

①乙部门生产技能测试中，中位数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高；

②乙部门生产技能测试中，众数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高。

故答案为：1，0，0，7，10，2；

240；甲或乙，①甲部门生产技能测试中，平均分较高，表示甲部门员工的生产

技能水平较高；

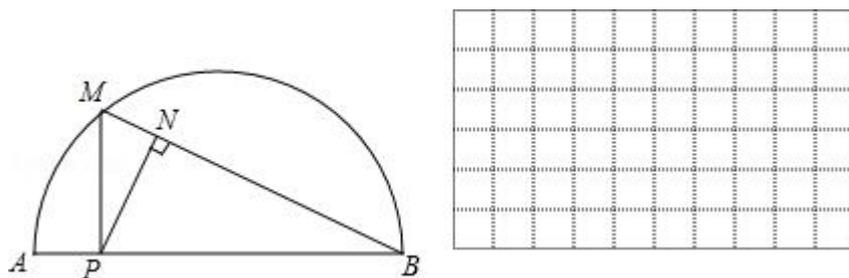
②甲部门生产技能测试中，没有技能不合格的员工，表示甲部门员工的生产技能水平较高；

或①乙部门生产技能测试中，中位数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高；

②乙部门生产技能测试中，众数较高，表示乙部门员工的生产技能水平较高。

【点评】 本题考查了众数、中位数以及平均数，掌握众数、中位数以及平均数的定义以及用样本估计总体是解题的关键。

26. (5分) (2017•北京) 如图，P是 \widehat{AB} 所对弦AB上一动点，过点P作 $PM \perp AB$ 交 \widehat{AB} 于点M，连接MB，过点P作 $PN \perp MB$ 于点N. 已知 $AB=6\text{cm}$ ，设A、P两点间的距离为 $x\text{cm}$ ，P、N两点间的距离为 $y\text{cm}$. (当点P与点A或点B重合时，y的值为0)



小东根据学习函数的经验，对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究. 下面是小东的探究过程，请补充完整：

(1) 通过取点、画图、测量，得到了 x 与 y 的几组值，如下表：

x/cm	0	1	2	3	4	5	6
y/cm	0	2.0	2.3	2.1	<u>1.6</u>	0.9	0

(说明：补全表格时相关数值保留一位小数)

(2) 建立平面直角坐标系，描出以补全后的表中各对对应值为坐标的点，画出该函数的图象.

(3) 结合画出的函数图象，解决问题：当 $\triangle PAN$ 为等腰三角形时，AP的长度约为 2.2 cm.

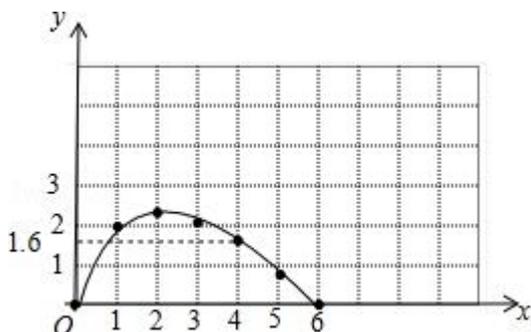
【分析】 (1) 利用取点，测量的方法，即可解决问题；

(2) 利用描点法，画出函数图象即可；

(3) 作出直线 $y=x$ 与图象的交点，交点的横坐标即可 AP 的长.

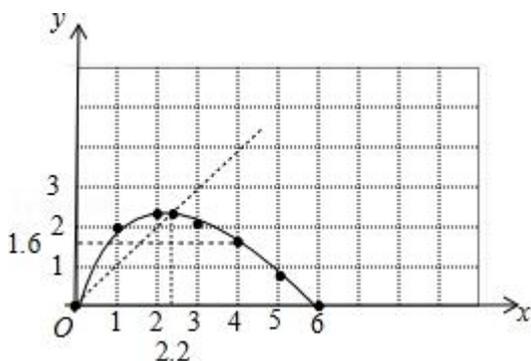
【解答】解：(1) 通过取点、画图、测量可得 $x=4$ 时， $y=1.6\text{cm}$ ，故答案为 1.6.

(2) 利用描点法，图象如图所示.



(3) 当 $\triangle PAN$ 为等腰三角形时， $x=y$ ，作出直线 $y=x$ 与图象的交点坐标为 (2.2, 2.2)，

$\therefore \triangle PAN$ 为等腰三角形时， $PA=2.2\text{cm}$.



故答案为 2.2.

【点评】本题考查圆综合题、坐标与图形的关系等知识，解题的关键是理解题意，学会用测量法、图象法解决实际问题，属于中考压轴题.

27. (7分) (2017•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2 - 4x+3$ 与 x 轴交于点 A、B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C.

(1) 求直线 BC 的表达式;

(2) 垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线交于点 P (x_1, y_1), Q (x_2, y_2), 与直线 BC 交于点 N (x_3, y_3), 若 $x_1 < x_2 < x_3$, 结合函数的图象, 求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围.

【分析】 (1) 利用抛物线解析式求得点 B、C 的坐标，利用待定系数法求得直线 BC 的表达式即可；

(2) 由抛物线解析式得到对称轴和顶点坐标，结合图形解答.

【解答】 解：(1) 由 $y=x^2-4x+3$ 得到： $y=(x-3)(x-1)$ ， $C(0, 3)$.

所以 $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

设直线 BC 的表达式为： $y=kx+b$ ($k \neq 0$)，

$$\text{则} \begin{cases} b=3 \\ 3k+b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases},$$

所以直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$ ；

(2) 由 $y=x^2-4x+3$ 得到： $y=(x-2)^2-1$ ，

所以抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的对称轴是 $x=2$ ， 顶点坐标是 $(2, -1)$.

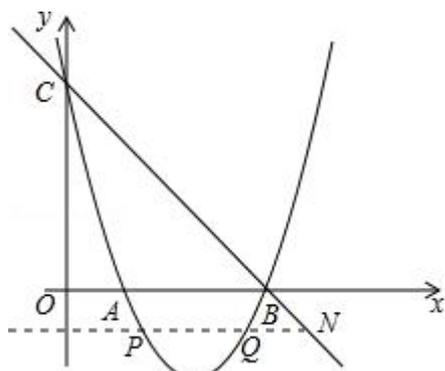
$$\because y_1=y_2,$$

$$\therefore x_1+x_2=4.$$

$$\text{令 } y=-1, y=-x+3, x=4.$$

$$\because x_1 < x_2 < x_3,$$

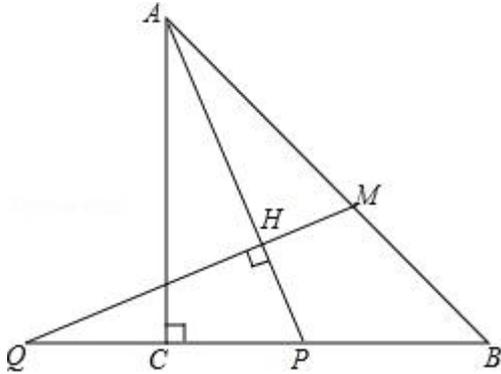
$$\therefore 3 < x_3 < 4, \text{ 即 } 7 < x_1+x_2+x_3 < 8.$$



【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点. 解答 (2) 题时，利用了“数形结合”的数学思想，降低了解题的难度.

28. (7分) (2017•北京) 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， P 是线段 BC 上一动点 (与点 B 、 C 不重合)， 连接 AP ， 延长 BC 至点 Q ， 使得 $CQ=CP$ ， 过点 Q 作 $QH \perp AP$ 于点 H ， 交 AB 于点 M .

- (1) 若 $\angle PAC = \alpha$ ，求 $\angle AMQ$ 的大小（用含 α 的式子表示）。
- (2) 用等式表示线段 MB 与 PQ 之间的数量关系，并证明。



【分析】 (1) 由等腰直角三角形的性质得出 $\angle BAC = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle PAB = 45^\circ - \alpha$ ，由直角三角形的性质即可得出结论；

(2) 连接 AQ ，作 $ME \perp QB$ ，由 AAS 证明 $\triangle APC \cong \triangle QME$ ，得出 $PC = ME$ ， $\triangle MEB$ 是等腰直角三角形，由等腰直角三角形的性质即可得出结论。

【解答】 解：(1) $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$ ；理由如下：

- $\because \angle PAC = \alpha$ ， $\triangle ACB$ 是等腰直角三角形，
- $\therefore \angle BAC = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle PAB = 45^\circ - \alpha$ ，
- $\because QH \perp AP$ ，
- $\therefore \angle AHM = 90^\circ$ ，
- $\therefore \angle AMQ = 180^\circ - \angle AHM - \angle PAB = 45^\circ + \alpha$ ；

(2) $PQ = \sqrt{2}MB$ ；理由如下：

连接 AQ ，作 $ME \perp QB$ ，如图所示：

- $\because AC \perp QP$ ， $CQ = CP$ ，
- $\therefore \angle QAC = \angle PAC = \alpha$ ，
- $\therefore \angle QAM = 45^\circ + \alpha = \angle AMQ$ ，
- $\therefore AP = AQ = QM$ ，

在 $\triangle APC$ 和 $\triangle QME$ 中，
$$\begin{cases} \angle MQE = \angle PAC \\ \angle ACP = \angle QEM \\ AP = QM \end{cases}$$
，

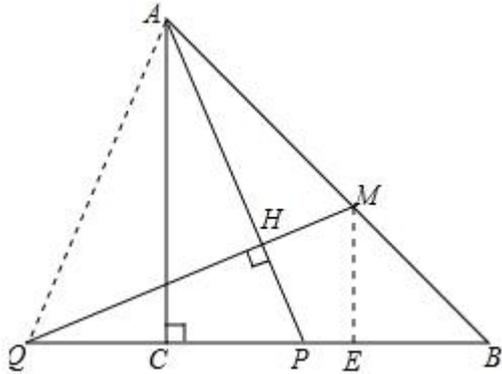
$\therefore \triangle APC \cong \triangle QME$ (AAS)，

$\therefore PC = ME$ ，

∴ $\triangle MEB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}MB,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{2}MB.$$



【点评】 本题考查了全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理；熟练掌握等腰直角三角形的判定与性质，证明三角形全等是解决问题的关键。

29. (8分) (2017•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M ，给出如下的定义：若在图形 M 上存在一点 Q ，使得 P 、 Q 两点间的距离小于或等于 1，则称 P 为图形 M 的关联点。

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 2 时，

① 在点 $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ ， $P_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_3(\frac{5}{2}, 0)$ 中， $\odot O$ 的关联点是 P_2, P_3 。

② 点 P 在直线 $y = -x$ 上，若 P 为 $\odot O$ 的关联点，求点 P 的横坐标的取值范围。

(2) $\odot C$ 的圆心在 x 轴上，半径为 2，直线 $y = -x + 1$ 与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B 。若线段 AB 上的所有点都是 $\odot C$ 的关联点，直接写出圆心 C 的横坐标的取值范围。

【分析】 (1) ① 根据点 $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ ， $P_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_3(\frac{5}{2}, 0)$ ，求得 $OP_1 = \frac{1}{2}$ ， $OP_2 = 1$ ， $OP_3 = \frac{5}{2}$ ，于是得出结论；② 根据定义分析，可得当最小 $y = -x$ 上的点 P 到原点的距离在 1 到 3 之间时符合题意，设 $P(x, -x)$ ，根据两点间的距离公式即可得出结论；

(2) 根据已知条件得到 $A(1, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，如图 1，当圆过点 A 时，得到 $C(-2, 0)$ ，如图 2，当直线 AB 与小圆相切时，切点为 D ，得到 $C(1 - \sqrt{2}, 0)$ ，于

是得到结论；如图 3，当圆过点 A，则 $AC=1$ ，得到 $C(2, 0)$ ，如图 4，当圆过点 B，连接 BC，根据勾股定理得到 $C(2\sqrt{2}, 0)$ ，于是得到结论.

【解答】解：(1) ① ∵ 点 $P_1(\frac{1}{2}, 0)$ ， $P_2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_3(\frac{5}{2}, 0)$ ，

$$\therefore OP_1 = \frac{1}{2}, OP_2 = 1, OP_3 = \frac{5}{2},$$

∴ P_1 与 $\odot O$ 的最小距离为 $\frac{3}{2}$ ， P_2 与 $\odot O$ 的最小距离为 1， OP_3 与 $\odot O$ 的最小距离为

$$\frac{1}{2},$$

∴ $\odot O$ ， $\odot O$ 的关联点是 P_2, P_3 ；

故答案为： P_2, P_3 ；

② 根据定义分析，可得当最小 $y = -x$ 上的点 P 到原点的距离在 1 到 3 之间时符合题意，

∴ 设 $P(x, -x)$ ，当 $OP=1$ 时，

$$\text{由距离公式得，} OP = \sqrt{(x-0)^2 + (-x-0)^2} = 1,$$

$$\therefore x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{当 } OP=3 \text{ 时，} OP = \sqrt{(x-0)^2 + (-x-0)^2} = 3,$$

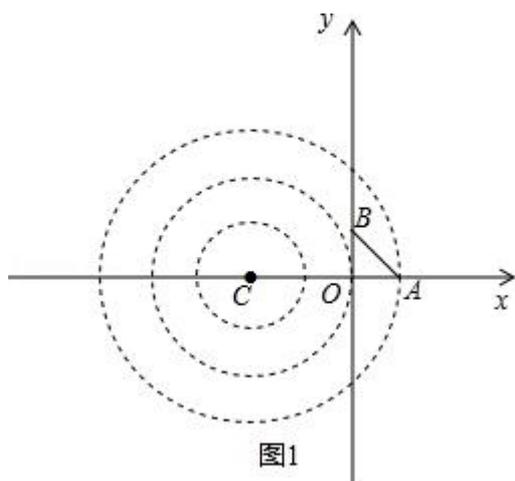
$$\text{解得：} x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的横坐标的取值范围为：} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

(2) ∵ 直线 $y = -x+1$ 与 x 轴、 y 轴交于点 A、B，

$$\therefore A(1, 0), B(0, 1),$$

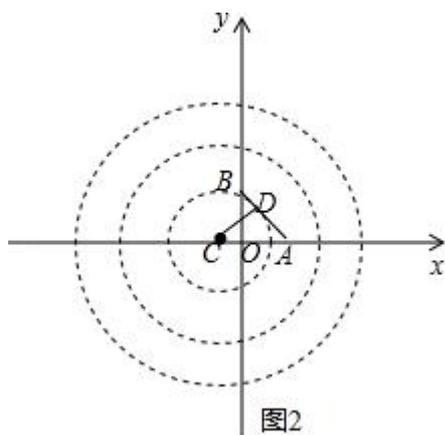
如图 1，



当圆过点 A 时，此时， $CA=3$ ，

$$\therefore C(-2, 0),$$

如图 2，



当直线 AB 与小圆相切时，切点为 D，

$$\therefore CD=1,$$

\therefore 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 1$ ，

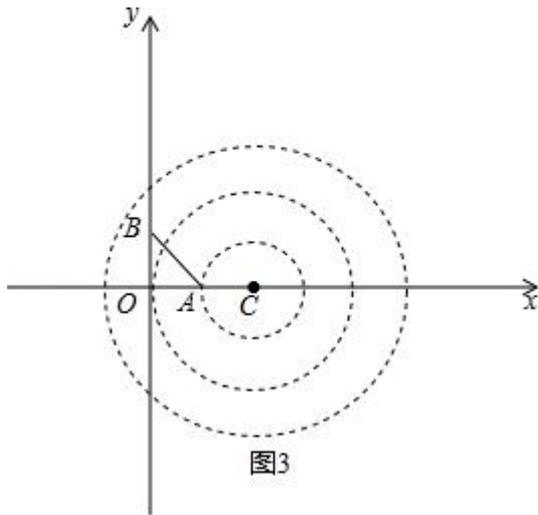
\therefore 直线 AB 与 x 轴的夹角 $= 45^\circ$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{2},$$

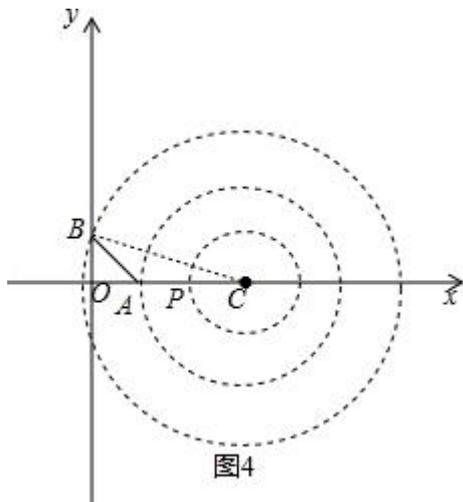
$$\therefore C(1 - \sqrt{2}, 0),$$

\therefore 圆心 C 的横坐标的取值范围为： $-2 \leq x_c \leq 1 - \sqrt{2}$ ；

如图 3，



当圆过点 A，则 $AC=1$ ， $\therefore C(2, 0)$ ，
如图 4，



当圆过点 B，连接 BC，此时， $BC=3$ ，

$$\therefore OC = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore C(2\sqrt{2}, 0).$$

\therefore 圆心 C 的横坐标的取值范围为： $2 \leq x_c \leq 2\sqrt{2}$ ；

综上所述；圆心 C 的横坐标的取值范围为： $-2 \leq x_c \leq 1 - \sqrt{2}$ 或 $2 \leq x_c \leq 2\sqrt{2}$ 。

【点评】 本题考查了一次函数的性质，勾股定理，直线与圆的位置关系，两点间的距离公式，正确的作出图形是解题的关键。